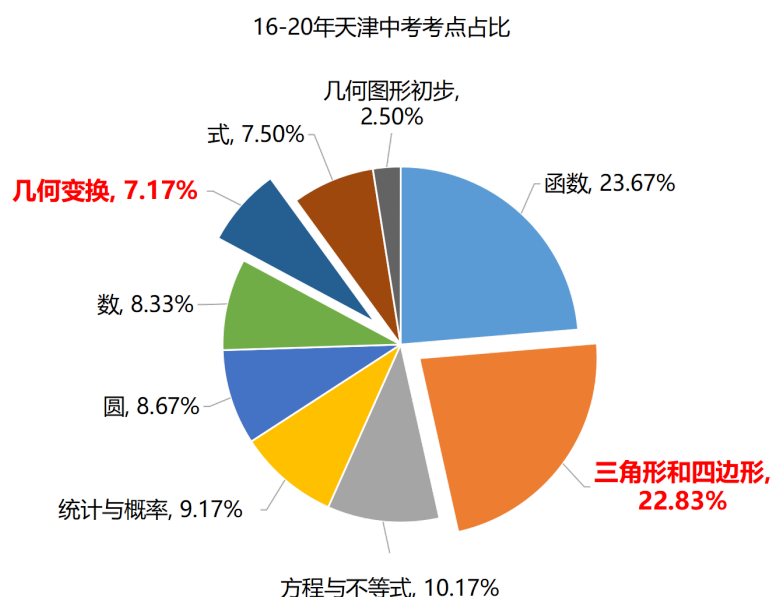


第1讲三角形的常用模型

《三角形与四边形提高》属于整个初中数学几何部分的重要知识，是《三角形基础》《四边形与圆基础》的后续模块，需要学生在掌握三角形、四边形基础性质、判定的前提下，进一步探究三角形常用模型、最值问题等，综合性较强。本模块的内容在中考中常以11题、17题的形式出现，占6分的分值，题目难度较大，需要学生进行系统的学习、归纳、整理，以提高综合运用能力。

本模块侧重于综合题，题目考察知识点较为多样，适用于一轮复习，三角形与四边形专项的短期突破。本模块分为三角形的常用模型，最值问题，面积、线段、角度问题 3 讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，突破重难点。

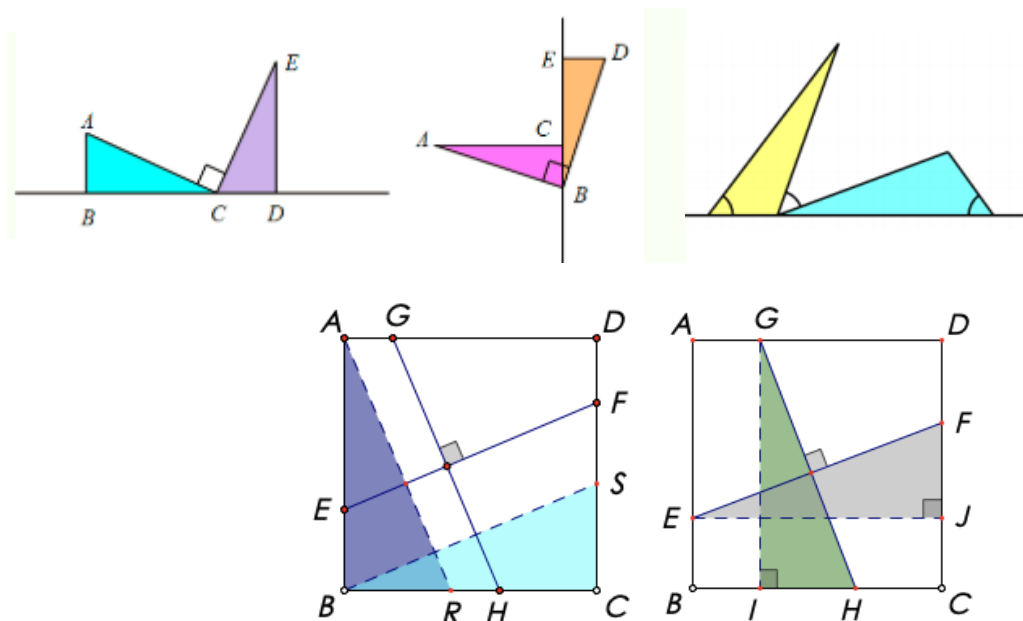
知己知彼



年份	分值	占比	题号
2020年	22	18%	8、11、17、18、24
2019年	19	16%	8、17、18、24
2018年	19	16%	11、17、18、24
2017年	19	16%	11、17、18、24
2016年	19	16%	10、17、18、24

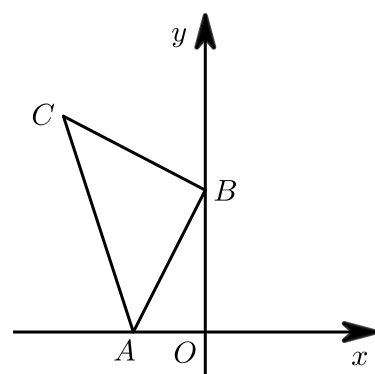
一、全等常见模型

1. 一线三垂直模型

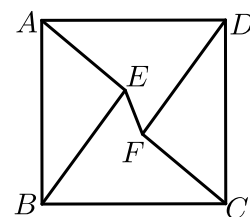


典题精练

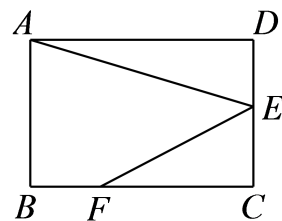
- 如图， $A(m, 0)$ ， $B(0, n)$ ，以 B 点为直角顶点在第二象限作等腰直角 $\triangle ABC$ ，则 C 点的坐标为 _____。（用字母 m 、 n 表示）



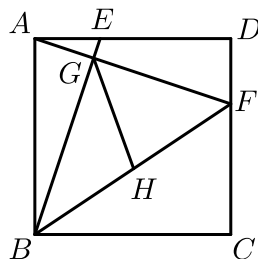
- 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AD = 5$ ，点 E ， F 是正方形 $ABCD$ 内的两点，且 $AE = FC = 3$ ， $BE = DF = 4$ ，则 EF 的长为 _____。



3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 的中点，点 F 是 BC 上一点，且 $FC = 2BF$ ，连接 AE ， EF ．
若 $AB = 2$ ， $AD = 3$ ，则 $\tan \angle AEF$ 的值是 _____ ．

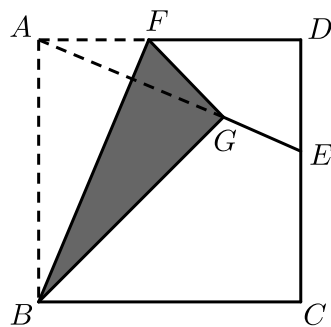


4. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为5，点 E 、 F 分别在 AD 、 DC 上， $AE = DF = 2$ ， BE 与 AF 相交于点 G ，点 H 为 BF 的中点，连接 GH ，则 GH 的长为 _____ ．



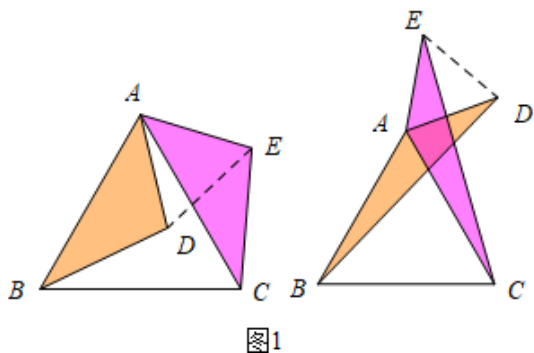
经典再现

5. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为12， E 是边 CD 上一点，连接 AE ，折叠该纸片，使点 A 落在 AE 上的 G 点，并使折痕经过点 B ，得到折痕 BF ，点 F 在 AD 上，若 $DE = 5$ ，则 GE 的长为 _____ ．

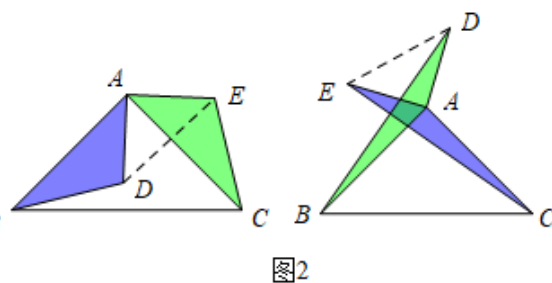


2. 手拉手模型

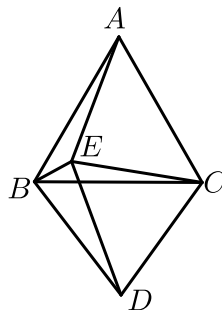
等边三角形（如图1）



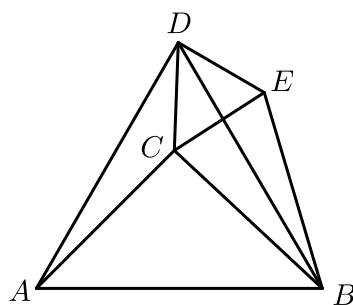
等腰直角三角形（如图2）



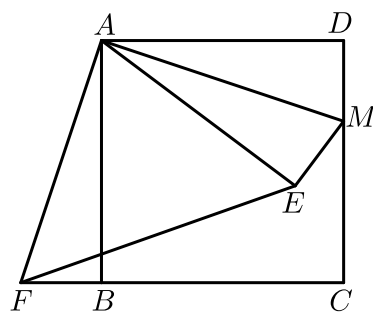
6. 如图，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，且 $\angle EBD = 62^\circ$ ，则 $\angle AEB$ 的度数是 _____ .



7. 如图， $\triangle ABD$ 和 $\triangle CED$ 均为等边三角形， $AC = BC$ ， $AC \perp BC$. 若 $BE = \sqrt{2}$ ，则 $CD =$ _____ .

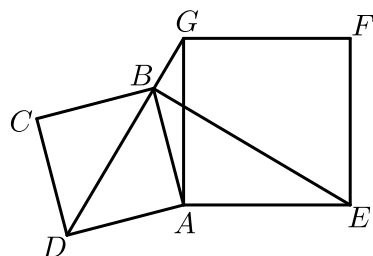


8. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ，点 M 在 CD 的边上，且 $DM = 1$ ， $\triangle AEM$ 与 $\triangle ADM$ 关于 AM 所在的直线对称，将 $\triangle ADM$ 按顺时针方向绕点 A 旋转 90° 得到 $\triangle ABF$ ，连接 EF ，则线段 EF 的长为 () .



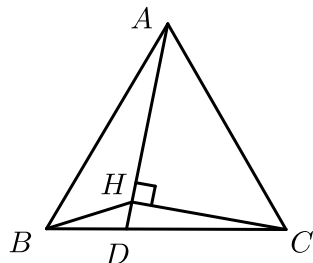
- A. 3 B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{15}$

9. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为2，正方形 $AEFG$ 的边长为 $2\sqrt{2}$ ，点 B 在线段 DG 上，则 BE 的长为 _____ .

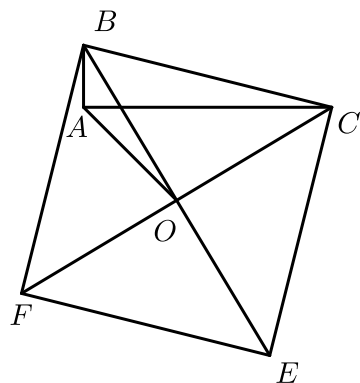


典题精练2

10. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB = \sqrt{7}$, 点 D 是边 BC 上一点, 点 H 是线段 AD 上一点, 连接 BH 、 CH , 当 $\angle BHD = 60^\circ$, $\angle AHC = 90^\circ$ 时, $DH = \underline{\hspace{2cm}}$.

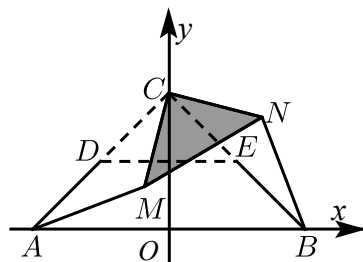


11. 如图, 以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 为一边在 $\triangle ABC$ 的同侧作正方形 $BCEF$, 设正方形的中心为 O , 连接 AO , 如果 $AB = 4$, $AO = 6\sqrt{2}$, 那么 AC 的长 = $\underline{\hspace{2cm}}$.

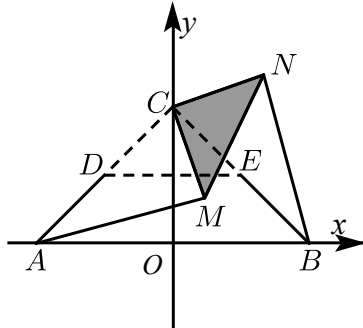


12. 在平面直角坐标系中, 点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$, 点 D 、 E 分别是 AC , BC 的中点, 将 $\triangle CDE$ 绕点 C 逆时针旋转得 $\triangle CMN$, 点 M , N 分别是点 D , E 旋转后的对应点, 记旋转角 α .

(1) 如图, 求证 $AM = BN$.



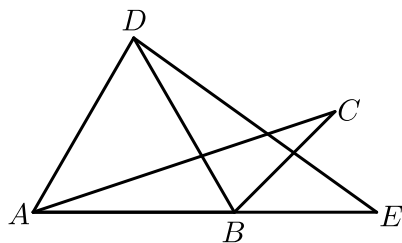
(2) 如图, 当 $\alpha = 75^\circ$ 时, 求点 N 的坐标.



(3) 当 $AM \parallel CN$, 求 BN 的长 (直接写出结果即可).

 真题再现

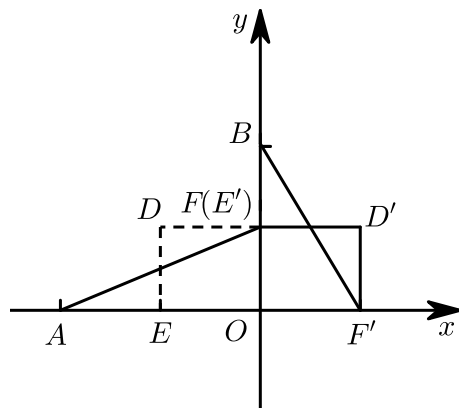
13. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得 $\triangle DBE$ ，点 C 的对应点 E 恰好落在 AB 的延长线上，连接 AD ．下列结论一定正确的是（ ）．



- A. $\angle ABD = \angle E$ B. $\angle CBE = \angle C$ C. $AD \parallel BC$ D. $AD = BC$

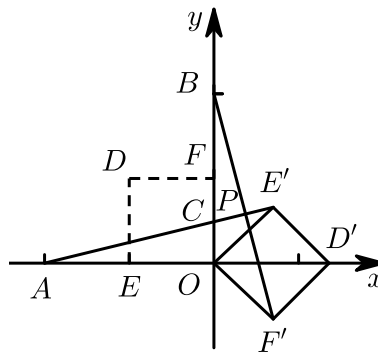
14. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(-2, 0)$ ，点 $B(0, 2)$ ，点 E ，点 F 分别为 OA ， OB 的中点．若正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转，得正方形 $OE'D'F'$ ，记旋转角为 α ．

(1) 如图①，当 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AE' ， BF' 的长．



图①

(2) 如图②，当 $\alpha = 135^\circ$ ，求证 $AE' = BF'$ ，且 $AE' \perp BF'$ ．

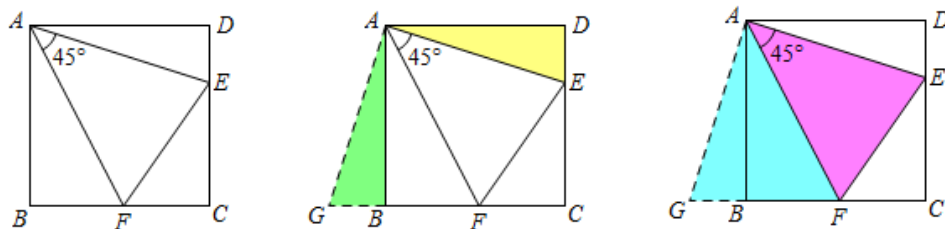


图②

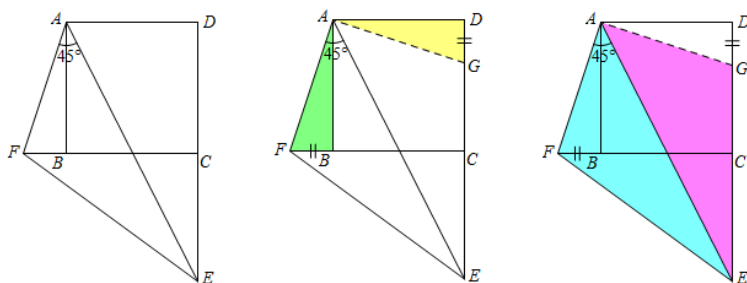
3. 角含半角模型

正方形中的角含半角

(1) 半角在倍角内

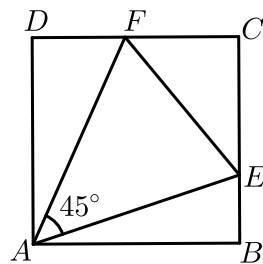


(2) 半角在倍角外



典题精练

15. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， $\triangle ECF$ 的周长为4，则正方形 $ABCD$ 的边长为（ ）。



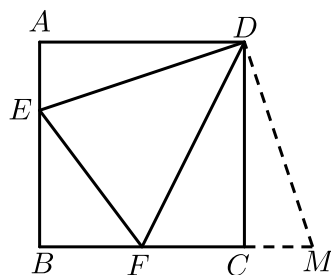
A. 2

B. 3

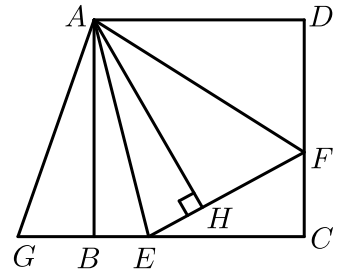
C. 4

D. 5

16. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为3， E 、 F 分别是 AB 、 BC 边上的点，且 $\angle EDF = 45^\circ$ 。将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle DCM$ 。若 $AE = 1$ ，则 FM 的长为_____。

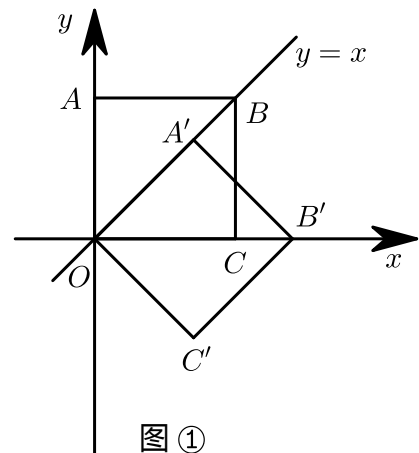


17. 如图，在正方形 $ABCD$ 内作 $\angle EAF = 45^\circ$ ， AE 交 BC 于点 E ， AF 交 CD 于点 F ，连接 EF ，过点 A 作 $AH \perp EF$ ，垂足为 H ，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABG$ ，若 $BE = 2$ ， $DF = 3$ ，则 AH 的长为 _____ ．



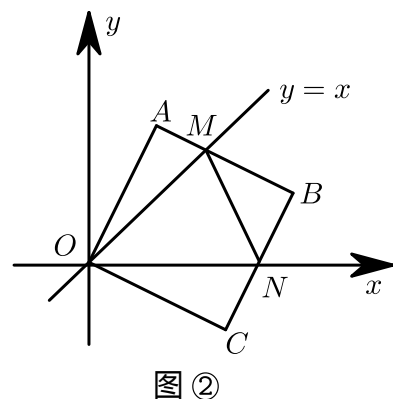
18. 在平面直角坐标系中， O 为原点，边长为2的正方形 $OABC$ 的两顶点 A ， C 分别在 y 轴、 x 轴的正半轴上，现将正方形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转．

- (1) 如图①，当点 A 的对应点 A' 落在直线 $y = x$ 上时，点 A' 的对应坐标为 _____ ；点 B 的对应点 B' 的坐标为 _____ ．



- (2) 旋转过程中， AB 边交直线 $y = x$ 于点 M ， BC 边交 x 轴于点 N ，当 A 点第一次落在直线 $y = x$ 上时，停止旋转．

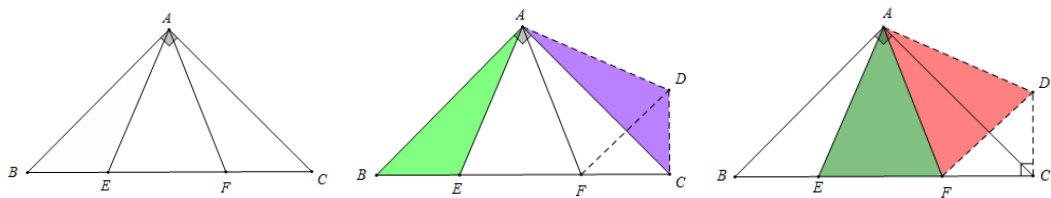
- ① 如图②，在正方形 $OABC$ 旋转的过程中，线段 AM ， MN ， NC 三者满足什么样的数量关系？请说明理由．



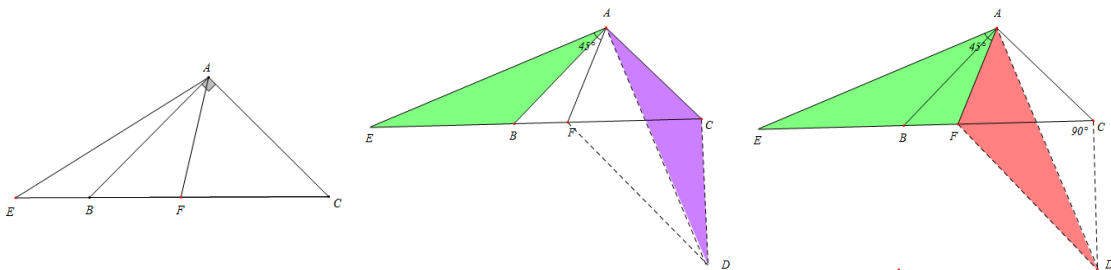
- ② 当 $AC \parallel MN$ 时，求 $\triangle MBN$ 内切圆的半径（直接写出结果即可）．

等腰直角三角形中的角含半角

(1) 半角在倍角内

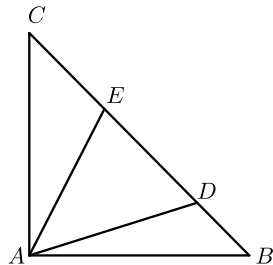


(2) 半角在倍角外

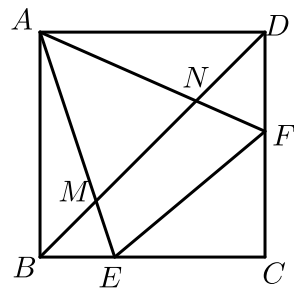


典题精练

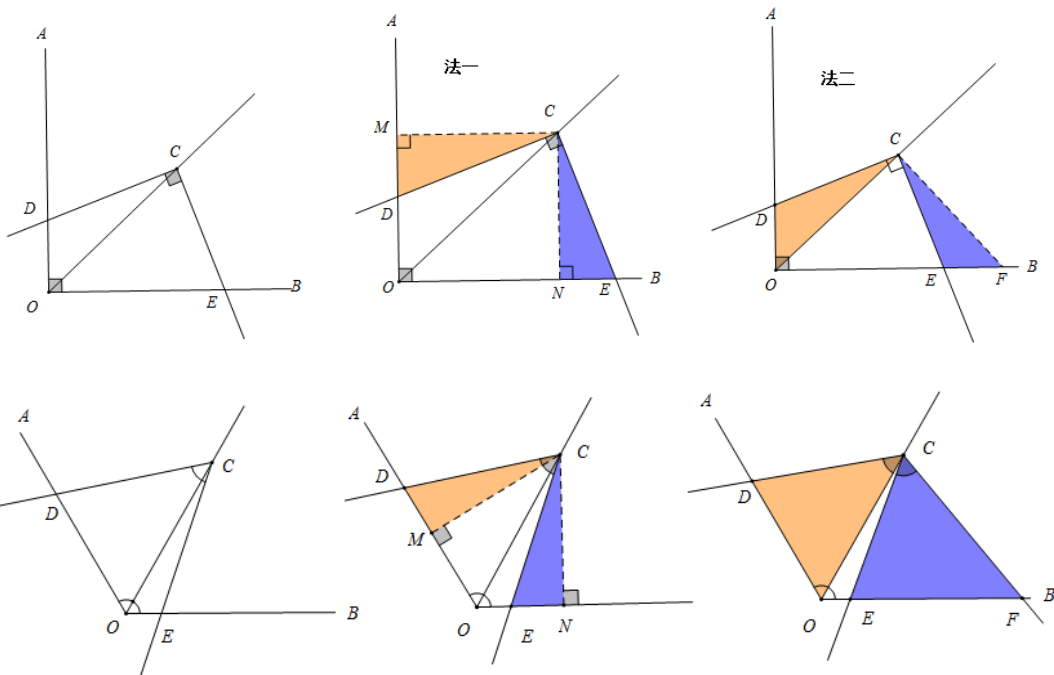
19. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AC = AB$ ， $\angle DAE = 45^\circ$ ，且 $BD = 3$ ， $CE = 4$ ，求 $\triangle ADE$ 的面积。



20. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 BD ，分别交 AE 、 AF 于点 M 、 N ；若 $BE = 3$ ， $DF = 4$ ，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$ ，若 $BM = 2$ ， $DN = 3$ ，则 $MN = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

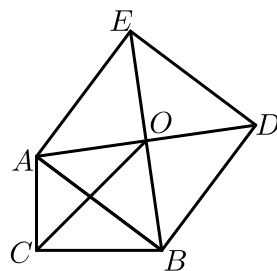


4. 对角互补模型

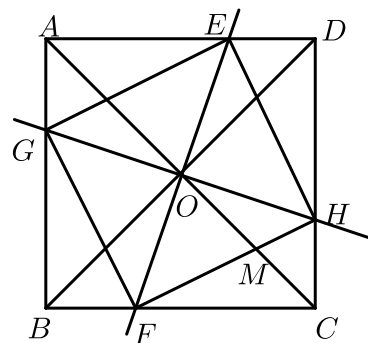


典题精练

21. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，以斜边 AB 为边向外作正方形 $ABDE$ ，且正方形对角线交于点 O ，连接 OC ，已知 $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，则 OC 的长为 _____ cm .

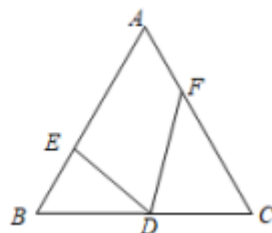
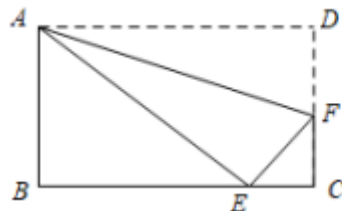


22. 如图，已知正方形 $ABCD$ ， O 为对角线 AC 与 BD 的交点，过点 O 的直线 EF 与直线 GH 分别交 AD ， BC ， AB ， CD 于点 E ， F ， G ， H ．若 $EF \perp GH$ ， OC 与 FH 相交于点 M ，当 $CF = 4$ ， $AG = 2$ 时，则 OM 的长为 _____ .



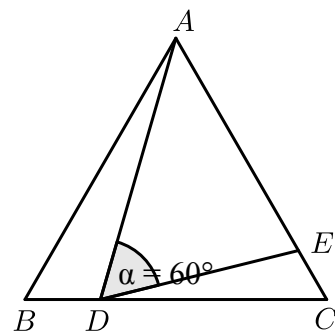
二、相似常见模型

1. 一线三垂直模型

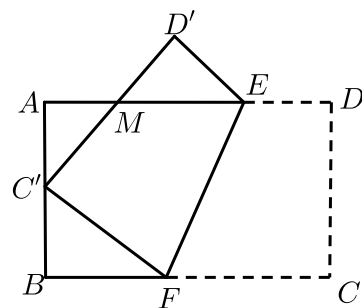


典题精练

23. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 、 E 分别在 BC 、 AC 上，且 $\angle ADE = 60^\circ$ ，若 $\triangle ABC$ 的边长为6， $CD = 2BD$ ，则 AD 的长为 _____ .

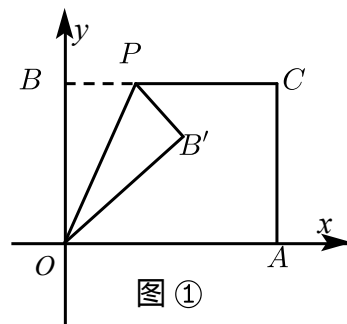


24. 如图，将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使顶点 C 恰好落在 AB 边的中点 C' 上，点 D 落在 D' 处， $C'D'$ 交 AE 于点 M 。若 $AB = 6$ ， $BC = 9$ ，则 AM 的长为 _____ .

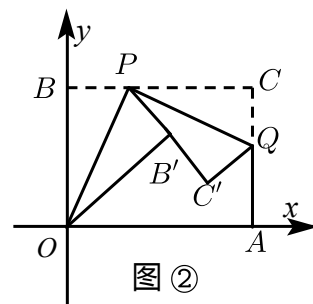


25. 已知一个矩形纸片 $OACB$ ，将该纸片放置在平面直角坐标系中，点 $A(11, 0)$ ，点 $B(0, 6)$ ，点 P 为 BC 边上的动点（点 P 不与点 B 、 C 重合），经过点 O 、 P 折叠该纸片，得点 B' 和折痕 OP 。设 $BP = t$ 。

(1) 如图①，当 $\angle BOP = 30^\circ$ 时，求点 P 的坐标。

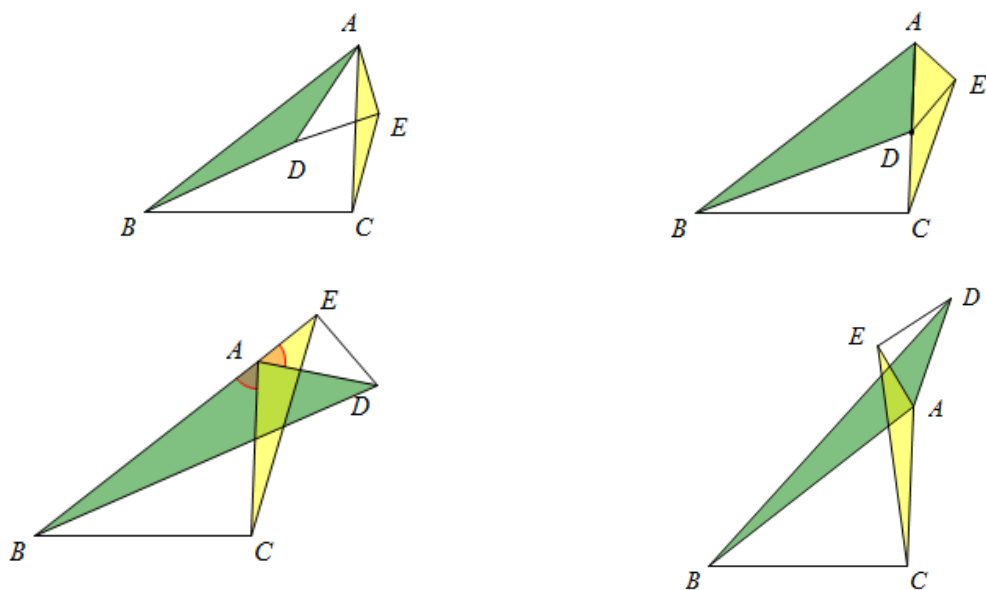


(2) 如图②，经过点 P 再次折叠纸片，使点 C 落在直线 PB' 上，得点 C' 和折痕 PQ ，若 $AQ = m$ ，试用含有 t 的式子表示 m 。



(3) 在 (2) 的条件下，当点 C' 恰好落在边 OA 上时，求点 P 的坐标（直接写出结果即可）。

2. 手拉手模型



典题精练

26. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = \sqrt{2}$ ， P 为射线 BC 上一动点．连接 AP ，将线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到线段 AQ ，射线 QP 交射线 AC 于点 D ．

(1) 如图1，当 P 在线段 BC 上时，若 $\angle BAP = 22.5^\circ$ ，则 $\angle CPD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ，并证明： $\triangle ABP \cong \triangle PCD$ ．

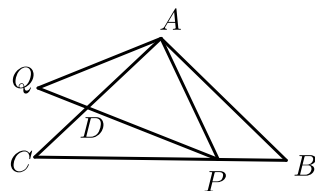


图1

(2) 如图2，若 P 在 BC 延长线上，请补全图形，并证明： $\triangle ABP \sim \triangle PCD$ ．

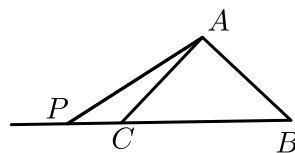


图2

(3) 若 $CD = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，请直接写出此时 BP 的长为： $\underline{\hspace{2cm}}$ ．

过关斩将

27. 如图1, 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = \frac{4}{3}BC$, E 、 F 分别 AB 、 BC 的中点, 分别过点 E 、 F 作 AB 、 BC 的垂线相交于点 O , 得矩形 $BEOF$.

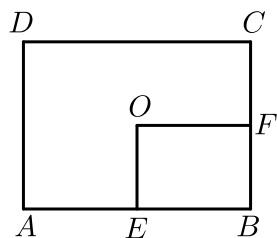


图1

- (1) 线段 AE 与 CF 的数量关系是_____, 直线 AE 与 CF 的位置关系是_____.
- (2) 固定矩形 $ABCD$, 将矩形 $BEOF$ 绕点 B 顺时针旋转到如图2的位置, 连接 AE 、 CF , 那么(1)中的结论是否依然成立? 请说明理由.

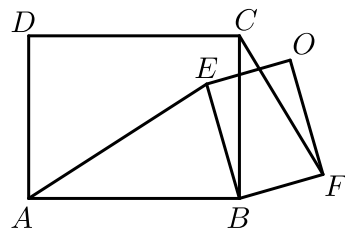


图2

- (3) 若 $AB = 8$, 当矩形 $BEOF$ 旋转至点 O 在 CF 上时 (如图3), 设 OE 与 BC 交于点 P , 求 PC 的长.

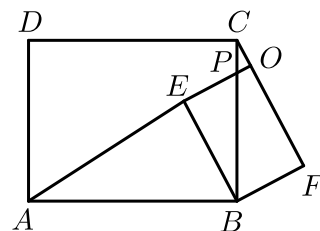
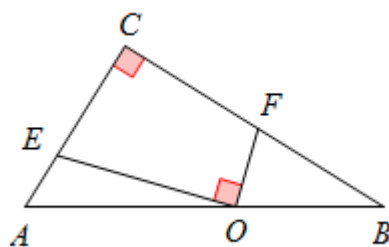


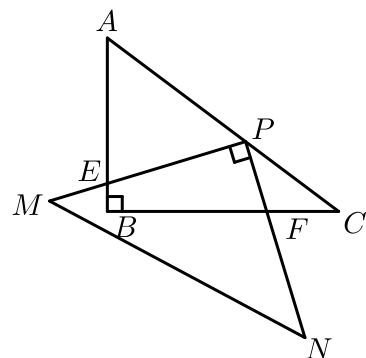
图3

3. 对角互补模型



典题精练

28. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，在 $\text{Rt}\triangle MPN$ 中， $\angle MPN = 90^\circ$ ，点 P 在 AC 上， PM 交 AB 于点 E ， PN 交 BC 于点 F ，当 $PE = 2PF$ 时， $AP = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



 过关斩将

29. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, D 为 AB 的中点, 点 E 在线段 AC 上, 点 F 在直线 BC 上, $\angle EDF = 90^\circ$.

(1) 如图1, 若点 E 与点 A 重合, 点 F 在 BC 的延长线上, 则此时 $\frac{DE}{DF} = \underline{\hspace{2cm}}$.

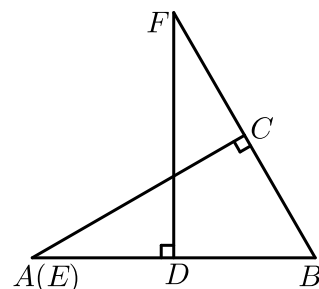


图1

(2) 若点 E 在线段 AC 上运动, 点 F 在线段 BC 上随之运动 (如图2), 请猜想在此过程中 $\frac{DE}{DF}$ 的值是否发生改变. 若不变, 请求出 $\frac{DE}{DF}$ 的值; 若改变, 请说明理由.

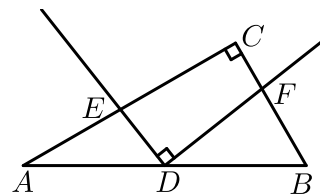


图2

(3) 在(2)的条件下, 在线段 EC 上取一点 G , 在线段 CB 的延长线上取一点 H , 其中 $\frac{EG}{FH} = k$, 请问 k 为何值时, 恒有 $\angle GDH = 90^\circ$. 请在图3中补全图形, 直接写出符合题意的 k 值, 并以此为条件, 证明 $\angle GDH = 90^\circ$.

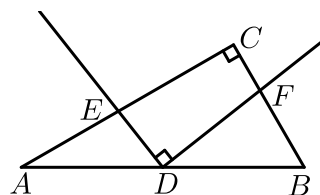


图3